Geometría II

Examen VI

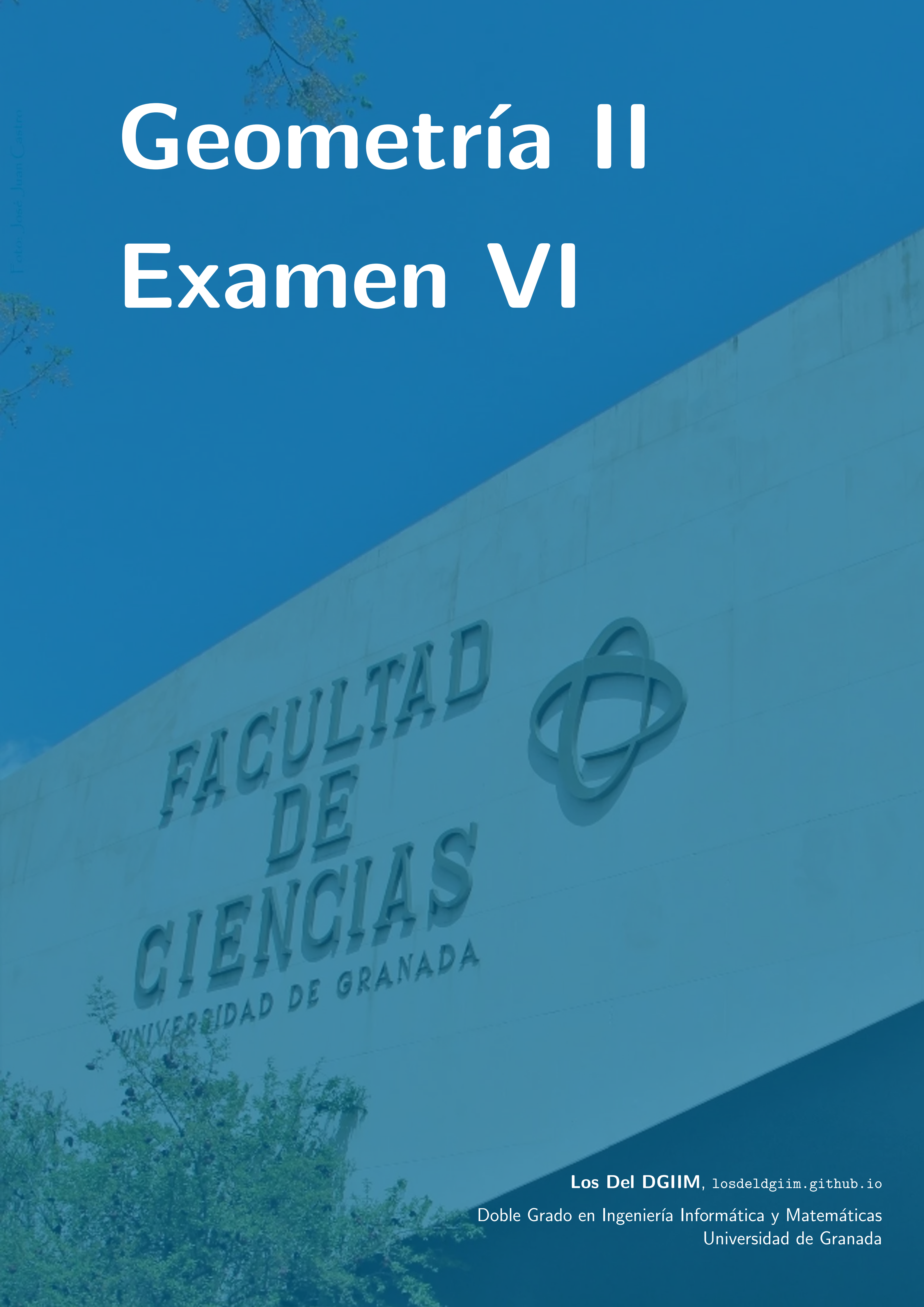

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2021-22.

Grado Matemáticas.

Profesor Francisco Milán López[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 15 de junio de 2022.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1. Se considera la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

con polinomio característico $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + a^2\lambda$.

1. Encontrar los valores de a para los que A es diagonalizable.

   Tenemos que su polinomio característico es:

   $$P_A(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + a^2) = \lambda(a+\lambda)(a-\lambda)$$

   Por tanto, los valores propios son $\lambda = \{0, a, -a\}$. Por tanto,

   - Si $a \neq 0$: Tenemos que los tres valores propios son distintos, por lo que son diagonalizables.
   - Si $a = 0$: Tenemos que la multiplicidad algebraica de $\lambda = 0$ es tres, pero $\dim V_0 = \dim Ker(f) = 3 - 1 = 2$. Por tanto, no es diagonalizable.

2. Diagonalizar para $a = 1$.

3. Para $a = 0$, estudiar si $\exists B \in M_3(\mathbb{R})$ diagonalizable tal que

   $$B^2 + A = 0$$

   Supongamos que $\exists B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalizable. Entonces:

   $$B \text{ diagonalizable} \Longrightarrow -B^2 \text{ diagonalizable}$$

   No obstante, tenemos que $-B^2 = A$ no es diagonalizable para $a = 0$, por lo que llegamos a una contradicción. No existe la matriz buscada.

Ejercicio 2. Sea g_a la métrica en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática está dada por:

$$F_a(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + 2(1-a)x_1x_3 + ax_3^2$$

1. Clasificar g_a según los valores de $a \in \mathbb{R}$:

   En primer lugar, calculamos la matriz asociada a g_a:

   $$G_a = M(g_a, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}$$

   Calculamos el determinante:

   $$|G_a| = a^2 - (1-a)^2 = a^2 - a^2 - 1 + 2a = 2a - 1 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

- Para $a = \frac{1}{2}$: Tenemos que $Nul(g_a) = 1$. Además, para $U = \mathcal{L}\{e_2, e_3\}$, tenemos que la restricción es definida positiva. Por tanto, tenemos que:
$$Nul(g_a) = 1 \qquad Ind(g_a) = 0$$
En este caso g_a es semidefinida positiva.
- Para $a > \frac{1}{2}$: Tenemos que $|G_a| > 0$. Además, tenemos G_a es definida positiva al ser todos sus menores principales positivos, por lo que g_a también es definida positiva.
- Para $a < \frac{1}{2}$: Tenemos que $|G_a| < 0$. Además, $g_a(e_2, e_2) = 1 > 0$, tenemos que g_a tiene al menos un 1 en la matriz asociada a la base de Sylvester. Por tanto, como $Nul(g_a) = 0$ y $|G_a| < 0$, es necesario que:
$$G_a \sim_c \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$
Por tanto, g_a es indefinida y $Nul(g_a) = 0$, $Ind(g_a) = 1$.

2. Calcular una base ortogonal de g_{-1}.

3. Calcular el núcleo de g_a.

Usando lo calculado en el primer apartado,

- Para $a \neq \frac{1}{2}$:
Tenemos que g_a es no degenerada, por lo que $Ker(g_a) = \{0\}$.
- Para $a = \frac{1}{2}$:
Tenemos que $rg(G_a) = 2$, por lo que $\dim Ker(g_a) = 1$.
$$\begin{aligned} Ker(g_a) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

4. Resolver $F_3(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Tenemos que:
$$F_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} G_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$
Por tanto,
$$F_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \equiv \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid g_3(v, v) = 0 \right\}$$
Para $a = 3$, tenemos que g_a es definida positiva. Por tanto, el único vector con cuadrado nulo es $v = 0$. Por tanto, la solución es un punto, el origen.

Ejercicio 3. Sea $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ el espacio vectorial euclídeo dado por el producto escalar y $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos planos vectoriales distintos.

1. Demostrar que existe una simetría axial $s \in End(\mathbb{R}^3)$ verificando:
$$s(U_1) = U_1 \qquad\qquad s(U_2) = U_2$$
Consideramos el subespacio vectorial $L = U_1 \cap U_2$. Como los planos son distintos, se cortan en una recta. Sea la recta $L = \mathcal{L}\{e\}$. Como $L = U_1 \cap U_2$, tenemos que:
$$\begin{gathered} L \subset U_1 \Longrightarrow U_1 = \mathcal{L}\{e, e_1\} \\ L \subset U_2 \Longrightarrow U_2 = \mathcal{L}\{e, e_2\} \end{gathered}$$
Suponemos sin pérdida de generalidad que $e_1, e_2 \perp e$, por lo que $e_1, e_2 \in L^\perp$. Por tanto,
$$\begin{aligned} \forall u_1 = ae + be_1 \in U_1, \quad s(u_1) = ae - be_1 \in U_1 \Longrightarrow s(U_1) \subset U_1 \\ \forall u_2 = ae + be_2 \in U_2, \quad s(u_2) = ae - be_2 \in U_2 \Longrightarrow s(U_2) \subset U_2 \end{aligned}$$
Por tanto, la simetría respecto de L cumple lo pedido.

2. Si consideramos los planos vectoriales
$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \qquad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$$
encontrar la matriz de s respecto de la base usual.

Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$. Tenemos que, en este caso, $U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} =$ $\{e_1 - e_2 + e_3\}$. Por tanto, tenemos que:
$$U^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \{e_1 + e_2, e_1 - e_3\}$$
Por tanto, sabiendo que $U = V_1, U^\perp = V_{-1}$, tenemos que:
$$\left\{\begin{aligned} s_U(e_1 - e_2 + e_3) &= e_1 - e_2 + e_3 = s_U(e_1) - s_U(e_2) + s_U(e_3) \\ s_U(e_1 + e_2) &= -e_1 - e_2 = s_U(e_1) + s_U(e_2) \Longrightarrow s_U(e_2) = -s_U(e_1) - e_1 - e_2 \\ s_U(e_1 - e_3) &= -e_1 + e_3 = s_U(e_1) - s_U(e_3) \Longrightarrow s_U(e_3) = s_U(e_1) + e_1 - e_3 \end{aligned}\right.$$
Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:
$$e_1 - e_2 + e_3 = s_U(e_1) + s_U(e_1) + e_1 + e_2 + s_U(e_1) + e_1 - e_3$$
Por tanto, tenemos:
$$\left\{\begin{array}{l} 3s_U(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ 3s_U(e_2) = -3s_U(e_1) - 3e_1 - 3e_2 = e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 3e_1 - 3e_2 = -2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ 3s_U(e_3) = 3s_U(e_1) + 3e_1 - 3e_3 = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 + 3e_1 - 3e_3 = 2e_1 - 2e_2 - e_3 \end{array}\right.$$
Por tanto, la matriz buscada es:
$$M(s_U, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$